

Požadavky ke zkoušce NTI/LADM

Podmínkou k účasti na zkoušce je získání zápočtu.

U zkoušky dostane student 2 otázky (jednu na definici pojmu, druhou na nějaké tvrzení a jeho aplikaci). Např.:

- (i) Definujte pojem diagonalizovatelná matice. Uvedte vztah pro výpočet mocniny diagonalizovatelné matice. Vypočtete A^{100} pro zadanou matici A .*
- (ii) Formulujte Frobeniovu větu. Aplikujte ji na zadanou soustavu.*

Na přípravu odpovědí bude mít dostatečný čas. Nelze používat literaturu, poznámky ani kalkulačky.

Seznam témat:

1. Vektory

- Vektory v \mathbb{R}^n , součet a násobek skalárem, lineární kombinace.
- Skalární součin, norma, jednotkový vektor, standardní jednotkové vektory v \mathbb{R}^n , nulový skalární součin. Vztah skalárního součinu jednotkových vektorů a kosinu úhlu. Kosinová věta a Schwarzova nerovnost.

2. Soustavy lineárních rovnic

- Řádkový a sloupcový význam, maticový zápis soustavy, rozšířená matice soustavy.
- Reálná matice řádu $m \times n$, součet a násobek skalárem, násobení matice a vektoru, jednotková, eliminační, permutační matice.
- Maticové násobení a jeho vlastnosti.
- Inverzní matice, rovnost levé a pravé inverze, inverze součinu.
- Gaussova eliminace. Časová a paměťová náročnost.
- Gaussova-Jordanova eliminace.
- LU rozklad, symetrický LU rozklad, aplikace na řešení soustav. LU rozklad s permutací řádků.
- Transponovaná matice, transpozice součtu, součinu, inverze, matice \times vektor ve skalárním součinu.

3. Vektorové prostory

- Příklady prostorů a podprostorů. Lineární nezávislost, báze, dimenze. Důkaz, že všechny báze jsou stejně velké.
- Obor hodnot matice, Frobeniova věta.
- Jádro matice, speciální řešení soustavy $Ax=0$. Vztah dimenze jádra a počtu volných proměnných.
- Redukovaný schodový tvar a jeho použití k výpočtu speciálních řešení.
- Hodnota matice, hodnota transponované matice.

- Řešení obecné soustavy $Ax=b$.
- Dimenze jádra a oboru hodnot A , A^T

4. Ortogonalita

- Ortogonální podprostory, ortogonální doplněk.
- Ortogonalita 4 podprostorů (jádra a oboru hodnot A , A^T).
- Ortogonální projekce na podprostor, projekční matice.
- Regularita $A^T A$ a lineární nezávislost sloupců A . Soustava normálních rovnic.
- Metoda nejmenších čtverců, lineární a kvadratická regrese, posun v čase a diagonalizace matice $A^T A$. Souvislost projekce a metody nejmenších čtverců.
- Ortonormální vektory, ortogonální matice, Gramův-Schmidtův proces, QR rozklad.

5. Determinant

- 3 základní vlastnosti determinantu a jejich důsledky.
- Definice pomocí $n!$ permutací. Výpočet pomocí pivotů a pomocí algebraických doplňků, výpočet pivotů z determinantů podmatic.
- Cramerovo pravidlo, výpočet inverzní matice pomocí algebraických doplňků.
- Výpočet obsahu trojúhelníku a kosodélníku a objemu rovnoběžnostěnu pomocí determinantu.
- Vektorový součin v \mathbb{R}^3 .

6. Vlastní čísla a vlastní vektory

- Definice, výpočet. Vztah stopy, determinantu a vlastních čísel.
- Diagonalizace, spektrální rozklad diagonalizovatelných matic.
- Maticové mocniny a jejich vlastní čísla a vektory.
- Algebraická a geometrická násobnost vlastních čísel.
- Maticové normy (generované, multiplikativní, Frobeniova norma).
- Vlastní čísla a vektory symetrických matic. Spektrální věta.
- Pozitivně definitní matice, aplikace na test minima a určení os elipsy.
- Podobné matice a jejich vlastní čísla a vektory.
- Jordanův rozklad matice.

7. Lineární transformace

- Definice a příklady. Jádro, obor hodnot, matice lineární transformace.
- Matice přechodu mezi 2 bázemi, změna báze a matice lineární transformace.
- Matice lineární transformace v bázi vlastních vektorů. Singulární rozklad.

8. Diskrétní matematika

- Grafy. Kružnice, cesta, úplný graf, isomorfní grafy, podgraf.
- Vzdálenost vrcholů v grafu, Dijkstrův algoritmus.
- ~~Eulerovské grafy a jejich charakterizace, algoritmus nakreslení grafu 1 tahem.~~
- Strom, list, charakterizace stromu. Kostra grafu, Kruskalův a Jarníkův algoritmus.

