Lineární algebra a diskrétní matematika – učební text (pracovní verze)

Jan Stebel

25. září 2018

Obsah

0 Úvod – základní pojmy

Na začátku stručně zmíním značení základních operací a množin používaných v textu.

Množinové operace. Symbol $\emptyset$ značí prázdnou množinu. Skutečnost, že nějaký prvek x leží v množině M a neleží v množině N, značíme zápisem $x \in M$, resp. $x \notin N$. Pro dvě množiny M a N definujeme průnik $M \cap N = \{x;\ x \in M \text{ a } x \in N\}$, sjednocení $M \cup N = \{x;\ x \in M \text{ nebo } x \in N\}$, rozdíl $M \backslash N = \{x \in M;\ x \notin N\}$ a kartézský součin $M \times N = \{(x, y);\ x \in M,\ y \in N\}$. Zde (x, y) je uspořádaná dvojice prvků. Je-li M částí (podmnožinou) N, tj. každý prvek M je také prvkem N, píšeme $M \subset N$.

Číselné množiny. Symboly $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ značí postupně množinu všech přirozených čísel (1,2,3,. . .), množinu celých čísel (tedy i nuly a záporných čísel), množinu racionálních, reálných a komplexních čísel.

Logické spojky. Pro výroky A a B (tvrzení, o nichž má smysl říci, že platí nebo neplatí) definujeme následující složené výroky: negace $\neg A$ (A neplatí), konjunkce $A \wedge B$ (platí A i B), disjunkce $A \vee B$ (platí alespoň jeden z výroků A nebo B), implikace $A \Rightarrow B$ (platí-li A, pak platí B), ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ (A platí právě tehdy, když platí B).

Kvantifikátory. Výraz $A(x)$ nazveme výrokovou formou, jestliže dosazením za x vznikne výrok. Obecný kvantifikátor $\forall$ se používá pro tvrzení $\forall x \in M : A(x)$ (pro každý prvek x množiny M platí výrok $A(x)$). Existenční kvantifikátor $\exists$ naopak vyjadřuje tvrzení $\exists x \in M : A(x)$ (existuje prvek x množiny M, pro nějž platí $A(x)$).

1 Vektory

V této kapitole zopakujeme vlastnosti rovinných a prostorových vektorů, které pak zobecníme pro vektory ve vyšších dimenzích.

1.1 Vektory a lineární kombinace

"Nemůžeme sčítat jablka s hruškami"— tuto větu téměř každý zaslechl v hodině matematiky. Je to vlastně důvod, proč zavést pojem *vektor*. Jestliže v_1 je počet jablek a v_2 počet hrušek, pak stav zásob ovoce vyjadřuje *sloupcový vektor*

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Kvůli úspoře místa budeme také někdy používat řádkový zápis

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Množinu všech dvousložkových sloupcových vektorů značíme symbolem $\mathbb{R}^2$.

1.1.1 Operace s vektory

Základními kameny lineární algebry jsou operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Tyto operace nyní zavedeme.

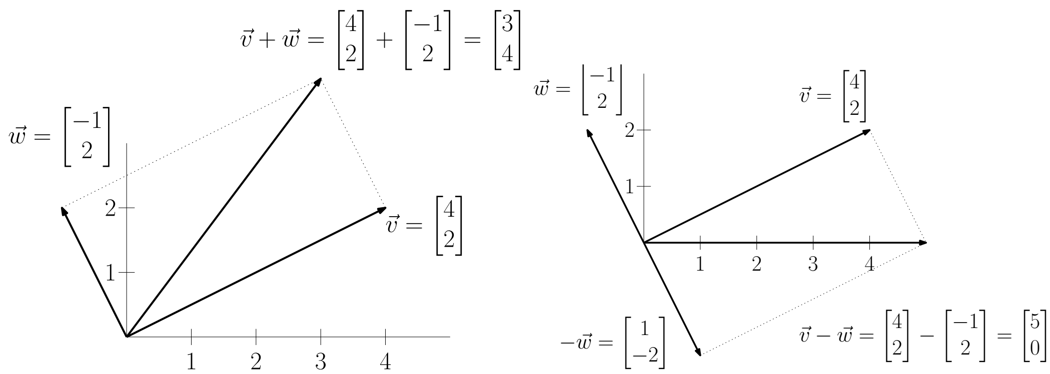
Sčítání a odčítání vektorů. U vektorů sčítáme jednotlivé složky zvlášť (jablka s jablky a hrušky s hruškami). Součet dvou vektorů $\vec{v}$ a $\vec{w}$ definujeme následovně:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}.$$

Analogicky definujeme odčítání vektorů:

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{bmatrix}.$$

Cvičení 1. *Ověřte, že sčítání vektorů je komutativní, tj.* $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.



Obrázek 1.1: Součet a rozdíl vektorů.

Násobení vektoru číslem (skalárem). Dvojnásobek vektoru $\vec{v}$ je dán vztahem

$$2\vec{v} = 2\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2v_1\\2v_2\end{bmatrix},$$

obecněji pro $c \in \mathbb{R}$ definujeme c-násobek vektoru vztahem

$$c\vec{v} = c\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cv_1\\cv_2\end{bmatrix}.$$

Číslo c se zde nazývá skalár.

Pro $c = -1$ píšeme zkráceně $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.

Cvičení 2. *Ověřte, že rozdíl vektorů lze definovat pomocí součtu a násobku skalárem:*

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}).$$

Poznamenejme ještě, že později zavedeme pro vektory několik dalších druhů součinů.

Nulový vektor. Vynásobením libovolného vektoru nulou dostaneme tzv. *nulový vektor* $\vec{0}$:

$$0\vec{v} = \vec{v} - \vec{v} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} =: \vec{0}.$$

Pozor! Nulový vektor není číslo, proto $\vec{0} \neq 0$.

1.1.2 Vektory ve 3 a více dimenzích

Dvousložkové vektory, s nimiž jsme dosud pracovali, odpovídají bodům v rovině xy nebo orientovaným úsečkám vycházejícím z počátku této roviny. Analogicky, vektor s 3 složkami je reprezentován bodem nebo orientovanou úsečkou v prostoru xyz. Třísložkové vektory patří do množiny $\mathbb{R}^3$.

Obecně, pro $n \in N$ tvoří n-složkové vektory množinu $\mathbb{R}^n$, jejich součet definujeme vztahem

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix},$$

atd.

1.1.3 Lineární kombinace

Zkombinováním dvou základních operací s vektory — součtu a násobení skalárem — vznikne lineární kombinace.

Definice. *Nechť $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou dva vektory o stejném počtu složek a $c, d \in \mathbb{R}$. Součet vektorů $c\vec{v}$ a $d\vec{w}$ se nazývá* lineární kombinace *vektorů $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Obecněji, výraz*

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k$$

se nazývá lineární kombinace vektorů $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Příklad 1.1. *Součet, rozdíl, násobek a nulový vektor jsou speciálními případy lineárních kombinací dvou vektorů:*

$$\begin{aligned} 1\vec{v} + 1\vec{w} &= \vec{v} + \vec{w}, \\ 1\vec{v} - 1\vec{w} &= \vec{v} - \vec{w}, \\ c\vec{v} + 0\vec{w} &= c\vec{v}, \\ 0\vec{v} + 0\vec{w} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní množinu všech lineárních kombinací nějakého nenulového vektoru. Lze ukázat, že

$$\{c\vec{v};\ c \in \mathbb{R}\} \text{ tvoří přímku procházející bodem } \vec{0}.$$

Jsou-li $\vec{v}$ a $\vec{w}$ dva vektory, které neleží na stejné přímce, pak

$$\{c\vec{v} + d\vec{w};\ c, d \in \mathbb{R}\} \text{ tvoří rovinu procházející bodem } \vec{0}.$$

Jsou-li $\vec{v}$, $\vec{w}$ a $\vec{z}$ vektory, které neleží ve stejné rovině, pak

$$\{c\vec{v} + d\vec{w} + e\vec{z};\ c, d, e \in \mathbb{R}\} \text{ tvoří 3d prostor obsahující bod } \vec{0}.$$

Pokud by ale např. vektor $\vec{z}$ ležel v rovině $\{c\vec{v} + d\vec{w}; c, d \in \mathbb{R}\}$, pak lineární kombinace vektorů $\vec{v}$, $\vec{w}$ a $\vec{z}$ budou tvořit jen rovinu.

1.1.4 Řešení příklady

Příklad 1.2. *Popište všechny lineární kombinace vektorů*

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Najděte vektor, který není lineární kombinací $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

Řešení
Lineární kombinace vektorů $\vec{v}$ a $\vec{w}$ mají tvar

$$c\vec{v} + d\vec{w} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c+d \\ d \end{bmatrix},\ c, d \in \mathbb{R}.$$

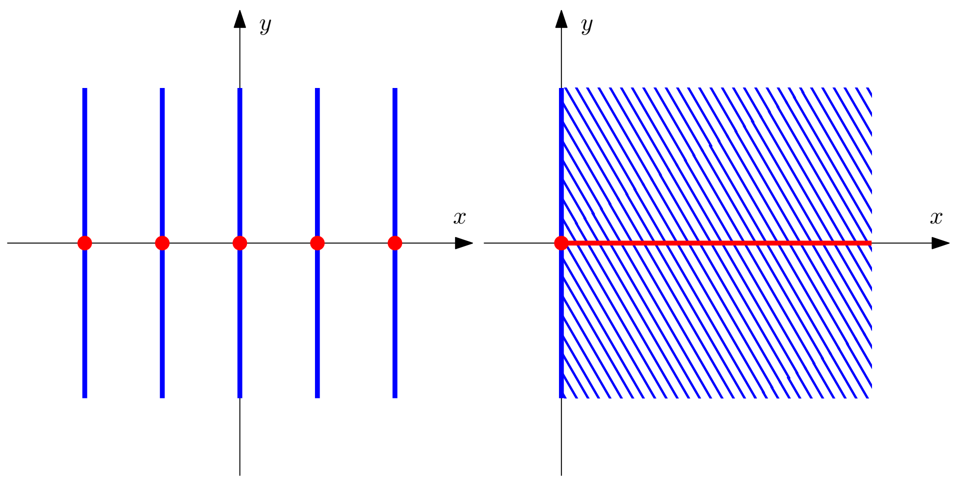
Jedná se tedy o všechny vektory v $\mathbb{R}^3$, jejichž 2. složka je součtem 1. a 3. složky. Konkrétní příklady jsou:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ není lineární kombinací $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

Jiná charakterizace roviny všech lineárních kombinací $\vec{v}$ a $\vec{w}$ je pomocí kolmého vektoru: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ je kolmý na $\vec{v}$ a $\vec{w}$ (tj. $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$). Lineární kombinace $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou pak všechny vektory kolmé na $\vec{n}$. ♣

Příklad 1.3. *Pro vektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ popište všechny body $c\vec{v}$ a lineární kombinace $c\vec{v} + d\vec{w}$, kde $d \in \mathbb{R}$ a a) $c \in \mathbb{Z}$, b) $c \geqslant 0$.*



Obrázek 1.2: Řešení příkladu 1.3 — vlevo $c \in \mathbb{Z}$, vpravo $c \geqslant 0$; červeně body $c\vec{v}$, modře $c\vec{v} + d\vec{w}$.

Řešení
a) Pro $c \in \mathbb{Z}$ dostaneme body $c\vec{v}$:

$$\ldots, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

rozmístěné rovnoměrně podél osy x. Přidáním $d\vec{w}$ vznikne z každého bodu přímka kolmá na osu x.
b) Pro $c \geqslant 0$ vyplní body $c\vec{v}$ polopřímku, $c\vec{v} + d\vec{w}$ polorovinu, viz obr. 1.2. ♣

1.2 Norma a skalární součin vektorů

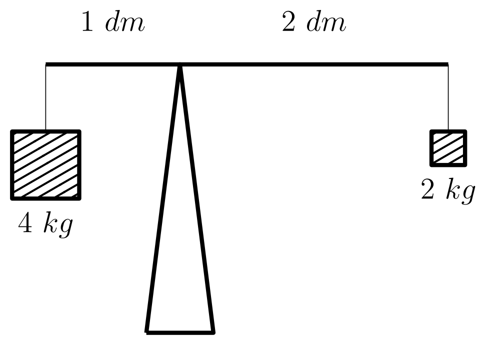
Skalární součin je operace, která ze dvou vektorů vytvoří skalár.

Definice. *Skalární součin vektorů* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ *a* $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}$ *je číslo*

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Pro vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ *definujeme skalární součin výrazem*

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n.$$



Obrázek 1.3: Ilustrace k Příkladu 1.4, rovnováha silových momentů.

Příklad 1.4. *Skalární součin vektorů* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$ *a* $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ *je*

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0.$$

Později si ukážeme, že skalární součin je nulový právě tehdy, když jsou vektory navzájem kolmé. Tento příklad má také následující interpretaci (viz Obr. 1.3): Váha má ramena o délce 1 dm a 2 dm. Na kratším rameně je zavěšeno závaží o hmotnosti 4 kg, na delším závaží 2 kg. Rovnice $\vec{w} \bullet \vec{x} = 0$ *pak představuje rovnováhu momentů sil.*

Příklad 1.5. *Nechť vektor* $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ *představuje ceny za jednotku tří druhů nabízeného zboží a vektor* $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$ *množství prodaného (je-li* $q_i > 0$*), resp. nakoupeného (*$q_i < 0$*) zboží. Celkový výnos je dán skalárním součinem*

$$\vec{p} \bullet \vec{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3.$$

Pokud $\vec{p} \bullet \vec{q} = 0$*, pak jsou příjmy a výdaje v rovnováze.*

Snadno lze ověřit, že skalární součin je komutativní, tj. $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$.

1.2.1 Norma vektoru

Skalární součin vektoru se sebou samým je vždy nezáporný. Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ je

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = 1 + 4 + 9 = 14.$$

V tomto případě je hodnota nenulová, protože $\vec{v}$ není kolmý sám na sebe. Výsledkem je druhá mocnina normy $\vec{v}$.

Definice. *Norma (velikost) vektoru $\vec{v}$ je dána výrazem*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}.$$

Příklad 1.6.

(i) *U rovinného vektoru $\vec{v}$ představuje norma délku přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsnami jsou složky v_1 a v_2, tedy $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, což je Pythagorova věta.*

(ii) *V třírozměrném prostoru je vzorec pro normu dvojitou kombinací Pythagorovy věty:*

$$\| \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + v_3^2}.$$

Například $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ lze rozložit na dva kolmé vektory $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, přičemž

$$\| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \| = \sqrt{5}, \quad \| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \| = 3.$$

Proto

$$\| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

(iii) *Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ představuje úhlopříčku v jednotkové krychli v $\mathbb{R}^4$. Její délka je*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2.$$

Úhlopříčka n-dimenzionální jednotkové krychle má délku $\sqrt{n}$.

Definice. *Vektor $\vec{u}$ se nazývá jednotkový vektor, je-li $\vec{u} \bullet \vec{u} = 1$.*

Příklad 1.7.

(i) *Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ je jednotkový, neboť $\vec{u} \bullet \vec{u} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Tento vektor dostaneme tak, že vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vydělíme jeho normou $\|v\|$.*

(ii) *Standardní jednotkové vektory v* $\mathbb{R}^2$ *značíme* $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$. *Obecný jednotkový vektor v* $\mathbb{R}^2$ *má tvar* $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$, *přičemž* θ *je úhel, který svírá tento vektor s kladnou částí osy* x.

(iii) *Standardní jednotkové vektory v* $\mathbb{R}^3$ *značíme* $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. *Každý vektor v* $\mathbb{R}^3$ *je lineární kombinací* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. *Například*

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3.$$

Protože $\|\vec{v}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$, *je* $\frac{1}{3}\vec{v} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ *jednotkový vektor ve směru* $\vec{v}$.

Následující tvrzení ukazuje jednoduchý způsob, jak vytvořit jednotkový vektor z libovolného nenulového vektoru.

Věta 1.1. *Nechť* $\vec{v}$ *je nenulový vektor. Pak* $\vec{u} := \vec{v}/\|\vec{v}\|$ *je jednotkový vektor ve směru* $\vec{v}$.

1.2.2 Úhel mezi vektory

Ukážeme, že skalární součin má přímý vztah k úhlu, který svírají dva vektory. Úkolem lineární algebry není určovat hodnotu úhlu, nicméně řada výsledků v lineární algebře je založena na ortogonálních (kolmých) vektorech.

Věta 1.2. *Nechť* $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. *Skalární součin* $\vec{v} \bullet \vec{w}$ *je nulový právě tehdy, když* $\vec{v}$ *je kolmý na* $\vec{w}$.

Důkaz. Vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou kolmé právě tehdy, když tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku. Přepona je pak dána vektorem $\vec{v}-\vec{w}$. Z Pythagorovy věty plyne:

$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}-\vec{w}\|^2,$$

a tedy

$$\vec{v} \bullet \vec{v} + \vec{w} \bullet \vec{w} = (\vec{v}-\vec{w}) \bullet (\vec{v}-\vec{w}) = \vec{v} \bullet \vec{v} - 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \vec{w} \bullet \vec{w},$$

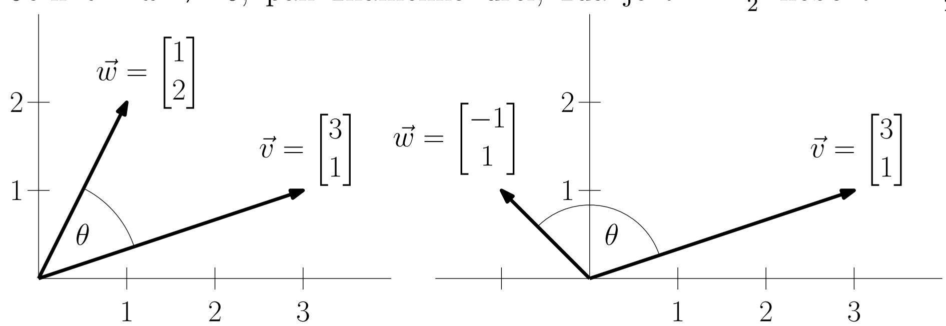
což je ekvivalentní rovnosti

$$0 = -2\vec{v} \cdot \vec{w}.$$

□

Právě dokázané tvrzení má následující důsledky:

- Skalární součin je nulový právě tehdy, když úhel θ mezi vektory je $\frac{\pi}{2}$, tj. když $\cos\theta = 0$.
- Nulový vektor je kolmý na každý vektor.
- Je-li $\vec{v} \bullet \vec{w} \neq 0$, pak znaménko určí, zda je $\theta > \frac{\pi}{2}$ nebo $\theta < \frac{\pi}{2}$:



$\vec{v} \bullet \vec{w} = 5 > 0,\ \ \theta < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\vec{v} \bullet \vec{w} = -2 < 0,\ \ \theta > \frac{\pi}{2}$

Následující věta dává do souvislosti hodnotu skalárního součinu a úhel mezi vektory.

Věta 1.3. *Jsou-li $\vec{u}, \vec{U} \in \mathbb{R}^n$ jednotkové vektory a θ je úhel mezi $\vec{u}$ a $\vec{U}$, pak $\vec{u} \bullet \vec{U} = \cos\theta$. Důsledkem je, že $|\vec{u} \bullet \vec{U}| \leqslant 1$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme tvrzení pro $n = 2$: Jednotkové vektory lze zapsat ve tvaru

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{U} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}.$$

Úhel, který tyto vektory svírají, pak je $\theta = \beta - \alpha$. Platí:

$$\vec{u} \bullet \vec{U} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\theta.$$

Pro $n > 2$ lze vektory $\vec{u}$ a $\vec{U}$ promítnout do nějaké roviny v $\mathbb{R}^n$, čímž problém převedeme na předchozí, již dokázaný případ. $\square$

Tuto větu lze snadno zobecnit pro libovolné dva nenulové vektory — vydělením jejich normami získáme:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \bullet \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \cos\theta.$$

Věta 1.4. *Nechť $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a θ je úhel mezi $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Pak platí:*

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \cos\theta, \qquad \text{(kosinová věta)}$$

$$|\vec{v} \bullet \vec{w}| \leqslant \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|. \qquad \text{(Schwarzova nerovnost)}$$

Důkaz. Je-li některý z vektorů $\vec{v}$, $\vec{w}$ nulový, pak jsou obě tvrzení triviálně splněna. V opačném případě definujme $\vec{u} := \vec{v}/\|\vec{v}\|$, $\vec{U} := \vec{w}/\|\vec{w}\|$ a aplikujeme větu 1.3. □

Příklad 1.8. *Nechť $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ a $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pak*

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{6}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{3}{5} > 0,$$

a tedy $\theta < \frac{\pi}{2}$. Dále platí Schwarzova nerovnost: $\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| = 10 \geqslant 6 = \vec{v} \bullet \vec{w}$.

Příklad 1.9. *Nechť $\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}$, kde a, b jsou libovolná nezáporná čísla. Pak ze Schwarzovy nerovnosti plyne:*

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = 2ab \leqslant a^2 + b^2 = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|,$$

což je ekvivalentní tomu, že

$$0 \leqslant (a - b)^2.$$

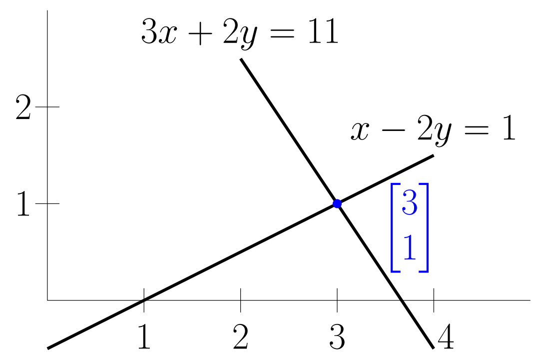
Označíme-li $x := a^2$, $y := b^2$, pak platí

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2},$$

což je tzv. AG nerovnost (vztah geometrického a aritmetického průměru).

2 Soustavy lineárních rovnic

Základní úlohou lineární algebry je řešení soustav rovnic, ve kterých jsou neznámé násobeny jen skalárem. Takovým rovnicím říkáme lineární.



Obrázek 2.1: Řádkový pohled na soustavu 2 rovnic pro 2 neznámé.

2.1 Řádková, sloupcová a maticová reprezentace soustav

Příklad 2.1 (Geometrický význam soustav)**.** *Je dána soustava 2 rovnic pro 2 neznámé:*

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \tag{1}$$

Soustavu znázorníme graficky dvěma způsoby.

a) Řádkový pohled: Každá rovnice představuje přímku v rovině xy. Řešením soustavy je pak průnik dvou přímek, tedy bod $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, kde $x = 3$ a $y = 1$ (viz Obr. 2.1).

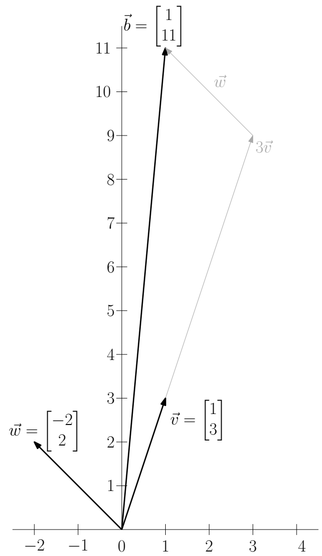
b) Sloupcový pohled: Soustava představuje vektorovou rovnici

$$x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} + y \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Neznámé x, y jsou tedy koeficienty lineární kombinace na levé straně této rovnice. Jak již víme z a), řešením je lineární kombinace

$$3\vec{v} + 1\vec{w} = \vec{b}.$$

Příslušné vektory jsou znázorněny na Obr. 2.2



Obrázek 2.2: Sloupcový pohled na soustavu 2 rovnic pro 2 neznámé.

V lineární algebře budeme zapisovat soustavy lineárních rovnic maticově. Například soustavu (1) zapíšeme ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Symboly

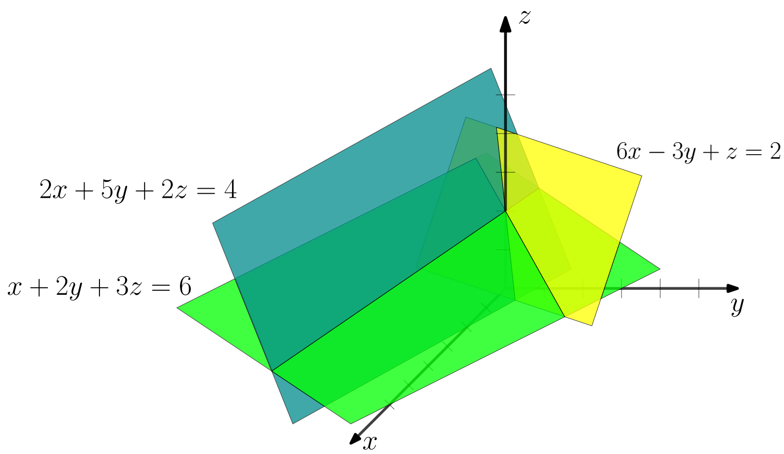
$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

se nazývají matice soustavy, vektor neznámých a vektor pravých stran.

Příklad 2.2. *Je dána soustava 3 rovnic pro 3 neznámé:*

$$\begin{aligned} x + 2y \quad +3z &= 6 \\ 2x + 5y \quad +2z &= 4 \\ 6x - 3y \quad + \ z &= 2. \end{aligned}$$

Řádkovým pohledem je soustava znázorněna jako průnik tří rovin v $\mathbb{R}^3$ *(viz Obr. 2.3). Vidíme, že pro řešení soustav o třech a více neznámých je tento postup poněkud komplikovaný.*



Obrázek 2.3: Řádkový pohled na soustavu 3 rovnic pro 3 neznámé.

Naproti tomu sloupcový pohled vede na vektorovou rovnici

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ze které lze snadno zjistit, že vektor pravých stran je dvojnásobkem třetího vektoru na levé straně. Řešením je tedy vektor $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Maticový tvar soustavy je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.2 Matice

Definice. *Reálná matice řádu $m \times n$ je výraz*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1\dots, m$, $j = 1, \dots, n$ je prvek na i-tém řádku a j-tém sloupci. Je-li $m = n$, říkáme, že matice je čtvercová řádu m. Množinu všech matic řádu $m \times n$ značíme $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Součin matice a vektoru $\mathbf{A}\vec{x}$ lze charakterizovat jako vektor skalárních součinů řádků matice $\mathbf{A}$ s vektorem $\vec{x}$ (řádkový pohled):

$$\mathbf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} (1.\ \text{řádek}\ \mathbf{A}) \bullet \vec{x} \\ (2.\ \text{řádek}\ \mathbf{A}) \bullet \vec{x} \\ (3.\ \text{řádek}\ \mathbf{A}) \bullet \vec{x} \end{bmatrix}$$

nebo jako lineární kombinaci sloupců matice (sloupcový pohled):

$$\mathbf{A}\vec{x} = x\begin{bmatrix}1.\ \text{sloupec}\ \mathbf{A}\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2.\ \text{sloupec}\ \mathbf{A}\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3.\ \text{sloupec}\ \mathbf{A}\end{bmatrix}.$$

Příklad 2.3. *Jsou dány matice* $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$ *a vektor* $\vec{x}$*:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Řádkovým, resp. sloupcovým přístupem spočteme součin matice a vektoru:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= 4\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\vec{x} &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= 4\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matice $\mathbf{I}$ *se nazývá jednotková matice řádu* 3*.*

Definice. *Nechť* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*. Pak* $\mathbf{A}\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ *je definován vztahem*

$$(\mathbf{A}\vec{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Příklad 2.4. *Řešte sloupcovým způsobem soustavu*

$$\begin{aligned} x + 3y \quad +2z &= -\,3 \\ 2x + 2y \quad +2z &= -\,2 \\ 3x + 5y \quad +4z &= -\,5. \end{aligned}$$

Řešení
Ze sloupcového zápisu soustavy

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

vidíme, že vektor $\vec{b}$ je až na znaménko roven druhému vektoru na levé straně. Řešením je tedy $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$. Toto řešení však není jediné — existuje např. řešení $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. ♣

Příklad 2.5. *Ukažte, že soustava*

$$\begin{aligned} x + 3y \quad +5z &= 4 \\ x + 2y \quad -3z &= 5 \\ 2x + 5y \quad +2z &= 8 \end{aligned}$$

nemá řešení.

Řešení
Vynásobíme-li rovnice čísly 1, 1, -1 a sečteme, získáme rovnici

$$0x + 0y + 0z = 1.$$

To znamená, že roviny dané příslušnými třemi rovnicemi nemají společný průnik.

Uvažujme nyní tutéž soustavu v maticovém tvaru s libovolným vektorem pravých stran $\vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{b}.$$

Označme $\vec{n} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Jestliže příslušnou vektorovou rovnici

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

vynásobíme skalárně vektorem $\vec{n}$, dostaneme rovnici

$$0x + 0y + 0z = \vec{b} \bullet \vec{n}.$$

Aby měla soustava řešení, je nutné aby vektor $\vec{b}$ byl kolmý na $\vec{n}$. Přesněji, soustava má řešení, pokud $\vec{b}$ je lineární kombinací sloupců matice soustavy.
♣

3 Vektorové prostory

4 Ortogonalita

5 Determinant

6 Vlastní čísla a vektory

7 Lineární transformace

8 Základy diskrétní matematiky

8.1 Kombinatorika

8.2 Teorie grafů