MBT1 – 7. cvičení

19. 12. 2012

Matice a soustavy lineárních rovnic

1. Vypočítejte součiny matic:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -7 & 10 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

2. Ověřte, že následující matice jsou regulární a najděte jejich inverzní matice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, kde $a, b, c, d, e \neq 0$.

3. Najděte všechna řešení soustavy rovnic:

a) $x + y - 2z + 3t = 0$, b) $\begin{aligned} 2x + 4y - 5z + 3t &= 0 \\ 4x - 2y + 5z - 7t &= 0 \\ 6x + 2y + 2t &= 0, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= 1 \\ 3x - 2y - z &= 0 \\ x + y + 2z + v &= 3 \\ 2x - y - z &= 0, \end{aligned}$

d)
$$\begin{aligned} x - 4y + 2z &= 1 \\ 3x - 7y + 11z - 15t &= 3 \\ y + z - 3t &= 0 \\ 4x - 11y + 13z - 15t &= 4, \end{aligned}$$
e)
$$\begin{aligned} x + 3y + 7z + 6u + 4v &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ y + z + u &= 2 \\ z + u + v &= 3. \end{aligned}$$

4. Řešte soustavu lineárních rovnic v závislosti na parametrech $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$:

a)
$$\begin{aligned} ax + by + (a^2+b^2)z &= b \\ bx + ay + (a^2+b^2)z &= -a \\ x + y + (a+b)z &= 0, \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} x - y + \lambda z - u &= \lambda^2 \\ x + \lambda y + z + \lambda u &= \lambda \\ x + 3y + z + 3u &= 1 \\ x + y + z + u &= 6. \end{aligned}$$

Výsledky:

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) nulová matice typu $(4,4)$; d) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$.

3. a) $\langle (3,0,0,-1), (0,3,0,-1), (0,0,3,2) \rangle$; b) $\langle (-1,3,2,0) \rangle$; c) jediné řešení $(1,1,1,-1)$; d) nekonečně mnoho řešení tvaru $(1,0,0,0) + a(-6,-1,1,0) + b(12,3,0,1)$, $a, b \in \mathbb{R}$; e) nemá řešení.

4. a) pro $a = b = 0$ nekonečně mnoho řešení tvaru $c(0,0,1) + d(-1,1,0)$, $c, d \in \mathbb{R}$, pro $a = b \neq 0$ žádné řešení, pro $a \neq b$ jediné řešení $(\frac{a+b}{a-b}, 0, \frac{1}{b-a})$; b) pro $\lambda = \frac{17}{7}$ nekonečně mnoho řešení tvaru $(\frac{169}{14}, -\frac{5}{2}, -\frac{25}{7}, 0) + a(0,-1,0,1)$, $a \in \mathbb{R}$, pro $\lambda \neq \frac{17}{7}$ řešení neexistuje.